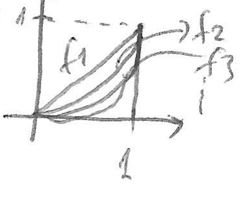
31/05/16. | Ομοιόμορφη Σύγκλιση Ακολουθιών Συναρτήσεων

$f_n : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ο ορισμός γενικεύεται σε σειρές συν/σεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ με $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$. Επίσης όλα γενικεύονται για $f_n : \tilde{E} \to \mathbb{R}^{\rho}$, $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^{k}$

Π.χ.



Παρατηρώ ότι $\forall x \in [0,1] = E$, $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} := f(x)$

$f_n(x) = x^n$

Ενώ f: συνεχής στο όριο το 1 χαλάει η συνέχεια ενώ "ξαπλώνει" συνεχώς προς το 1, φτάνει και γίνεται $f = 1$ όχι $f_n \to 0$

Ορισμός: Μια ακολ. συναρτήσεων $f_n : E\to\mathbb{R}$ συγκλίνει (κατά σημείο) στη συνάρτηση $f:E\to\mathbb{R}$ αν $\forall x\in E$: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}): \forall n\geq n_0: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Το κεντρικό ερώτημα όταν εξετάζουμε ακολ. συναρτήσεων είναι αν και υπό ποιους όρους οι ιδιότητες των ορίων μεταφέρονται στο όριο της ακολουθίας (π.χ. στο παράδειγμα: $f_n\in C([0,1]) \Leftrightarrow$ συνεχής στο $[0,1]$ αλλά $\lim f_n = f\notin C([0,1])$).

Αλλιώς, το ερώτημα είναι αν $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{\overset{f_n\in C}{=} f_n(x_0)} \overset{?}{=} \lim_{x\to x_0}\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(x)}_{=f(x)}$

Αντίστοιχα, το ερώτημα τίθεται σε όλες τις οριακές διαδικασίες π.χ.

$$\lim_{n\to\infty} f_{\frac{1}{n}}(x) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

(*) Σύγκλιση Κατά σημείο (*): δεν είναι αρκετά ισχυρή για να εξασφαλίσει την αλλαγή της σειράς των οριακών διαδικασιών δηλ.
$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) \neq \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Ορισμός: Μια ακολ. $f_n : E\to\mathbb{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f:E\to\mathbb{R}$ αν:
$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\forall x\in E: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ (εδώ $n_0=n_0(\varepsilon)$ ενώ στο κατά σημείο $n_0=n_0(\varepsilon,x)$)

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\forall n\geq n_0: \sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| = \|f_n-f\|_\infty<\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ η "απόσταση" ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0.

Συμβολισμός: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$: ομοιόμορφα ή $\|f_n-f\|_\infty \to 0$

Πρόταση: $f_n\to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n\to f$ κατά σημείο.

Απόδ: Έστω $x_0\in E$ και $\varepsilon>0$. $\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0: \sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$
αλλά αφού το μέγιστο από τα $|f_n(x)-f(x)|$ είναι $<\varepsilon \Rightarrow |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$

(SOS) **Θεώρημα Cauchy (Κριτήριο Cauchy)**: Η ακολ. $f_n : E\to\mathbb{R}$ συγκλίνει ομοιομ. αν είναι ακολουθία Cauchy ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ δηλ.) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n,m\geq n_0): \|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$

Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω $f_n\to f$: ομ. και $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists n_0: \forall n,m\geq n_0: \|f_n-f\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$, $\|f_m-f\|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x\in E$: $\cancel{|f_n(x) - \|f\|_\infty \leq \|f_n-f\|_\infty + \|f_m-f\|_\infty}$

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{\|f_n-f\|_\infty} + \underbrace{|f_m(x)-f(x)|}_{\|f_m-f\|_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

($\Leftarrow$) Έστω $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0 : |f_n(x_0) - \cancel{f_m} f_m(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\xRightarrow{\mathbb{R}: \text{πλήρης}} \exists f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$ Άρα αυτό ισχύει $\forall x_0 \in E$. Έχουμε βρει το κατά σημείο όριο της ~~fn~~ f_n

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Θέλω νδο $f_n \to f$: ομοιόμ. Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0, \forall n, m \geq n_0$

$\forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \xRightarrow[m\to\infty]{} \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)|} < \varepsilon \Rightarrow f_n \to f$ ομ.

Το βασικότερο Θεώρημα για την ~~εν~~ εναλλαγή της σειράς οριακών διαδικασιών

Θεώρημα ✱✱ : Έστω $E \subset \mathbb{R}$, $f_n, f : E \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$: ομοιόμορφα, x : σημείο συσσώρευσης του E (δηλ) το x : προσεγγίζεται από ~~ακολ~~ ακολουθίες σημείων) : $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{t\to x} f_n(t) = a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n \to \lim_{t\to x} f(t) \in \mathbb{R}$

Ισοδύναμα : $\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)$

Πόρισμα : $E \subset \mathbb{R}$. $f_n : E \to \mathbb{R}$ συνεχής, $f_n \to f$: ομοιόμορφα $\Rightarrow f$: συνεχής

Έστω $x \in E \Rightarrow \lim_{t\to x} f_n(t) = f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) \\ \lim_{t\to x} f(t) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{t\to x} f(t)$ (αφού η ακολ. συγκλίνει σε ένα όριο).

Πόρισμα : Έστω $E \subset \mathbb{R}$ συμπαγές, $C(E) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ : συνεχής}\}$:
Ο χώρος διανυσ. ~~ε~~ συναρτήσεων και η $\|f\|_\infty = \max_{x\in E} |f(x)|$

$[\|f\|_\infty \geq 0 : \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0, \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty]$ (έβαλα max διότι E : συμπαγής)

Άρα ~~...~~ $(C(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα και είναι πλήρης μ.χ. ως προς την επαγόμενη μετρική $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ δηλ) χώρος Banach !

(σε πλήρη μ-χ. κάθε ακολ. είναι Cauchy)

δηλ) $(f_n) \subset (C(E), \|\cdot\|_\infty)$ ακολ. Cauchy $\xRightarrow[\text{Cauchy}]{\text{κριτ.}} \exists f : E \to \mathbb{R} : f_n \to f$ ομοιομ. $\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty$
και από το πόρισμα $\Rightarrow f \in C(E)$ $\Rightarrow (f_n)$: Cauchy στο $(C(E), \|\cdot\|_\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists f \in C(E) : \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ [αν E : όχι συμπαγές $\not\Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$]
π.χ. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολ/μες, $f_n \to f$ ομοιομ. $\Rightarrow f$: ολ/μη

και $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \underbrace{f(x)}_{=\lim_{n\to\infty} f_n(x)}\,dx$

<u>Θεώρημα</u>: $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες, $\exists x_0 \in [\alpha, \beta] : (f_n(x_0)$: συγκλίνει$)_{n\in\mathbb{N}}$

και (f_n') συγκλίνει ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n \to f$: ομοιομ. και:

$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ $\left[\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim \frac{d}{dx} f_n(x) \right]$

<u>Π.χ./Άσκηση</u>: Ποιες ακολ. συγκλίνουν ομοιόμορφα;

(α) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$: όπως είδαμε: $\underbrace{f_n}_{\text{συνεχής}} \to \underbrace{\begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}}_{\text{ασυνεχής}}$

(β) $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $f_n(x) \to 0 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ κατά σημείο

$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \right.$: όταν μια σειρά συγκλίνει, τότε οι όροι της $\left.\to 0\right]$

αλλά όχι ομοιόμ. αφού $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{n!} - 0 \right| = \infty$ άρα $\not\to 0$

(γ) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$, $x \in [0,1)$

$f_n \to f = 0$ κατά σημείο (φιξάρω το x). Θα δδ $\sup_{x\in(0,1)} |f_n - f| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{x}{1+nx} \to 0$

αφού είναι παρ/μη $\Rightarrow f_n'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in (0,1) : f_n(x) \le \frac{1}{1+n} \Rightarrow \underbrace{\|f\|_\infty}_{\|f_n - f\|} \le \frac{1}{1+n} \to 0 \Rightarrow f_n \to f = 0$: ομοιόμορφα